Задание 1. На столе лежат карточки, на которых написаны буквы Вашего полного имени; на каждой карточке – по одной букве. Карточки переворачивают буквой вниз и перемешивают. Затем карточки берут по одной, переворачивают буквой вверх и кладут друг за другом в один ряд. Какова вероятность, что в конце получится Ваше полное имя?

Решение: имя - Ольга

порядок важен - речь идет о словах! Поэтому:

$$P(A) = \frac{1*1*1*1*1*1}{5!} = 1/120$$

(*каждая буква повторяется* 1 *раз.*
всего 5 *букв*).

Задание 2. В коробке лежат 10 шаров, из них t шаров красного цвета, остальные – синие. Из коробки наугад достали 3 шара.

1. Запишите полную систему событий такого испытания.
2. Пусть X – случайная величина количества красных шаров в выборке. Запишите закон распределения данной случайной величины.
3. Какой результат опыта наиболее вероятен? Ответ обоснуйте.

Элементарные исходы испытания – наборы из трех шаров. Укажем эту полную систему

событий: (к,к,к)- всего $C_9^3 = 84$, (к,к,с)- всего $C_9^2 * C_1^1 = 36$.

$$P(X = 0) = 0$$
$$P(X = 1) = 0$$
$$P(X = 2) = \frac{C_9^2 * C_1^1}{C_{10}^3} = \frac{36}{120}$$
$$P(X = 3) = \frac{C_9^3}{C_{10}^3} = \frac{84}{126}$$

Закон распределения:

X	0	1	2	3
P	0	0	36/126	84/126

Т.к. 84/126 > 36/126 , то наиболее вероятно появление трех красных шаров.

Задание 3. Лампы накаливания, продающиеся в магазине, могут принадлежать одной из трех партий с вероятностями 0,2, 0,3, 0,5. Вероятность того, что лампа бракованная для первой партии равна t%, для второй партии t + 10%, для третьей партии t + 15%. Определите вероятность того, что:

1. купленная Вами лампа не бракованная,
2. что она принадлежит:
   - первой партии,
   - второй партии,
   - третьей партии.

Введем гипотезы:

H_1 – лампа принадлежит 1-й партии.

H_2 – лампа принадлежит 2-й партии.

H_3 – лампа принадлежит 3-й партии.

По условию

$P(H_1) = 0{,}2$

$P(H_2) = 0{,}3$

$P(H_3) = 0{,}5$

3(3): А- купленная лампа не бракованная

По формуле полной вероятности получим:

$$P(A) = \sum_{1}^{3} P(H_i)\,P(A/H_i) = 0{,}2*0{,}91 + 0{,}3*0{,}81 + 0{,}5*0{,}76 = 0{,}805$$

3(4): По формуле Байеса:

$$P(H_1/A) = \frac{P(H_1)\,P(A/H_1)}{P(A)} = \frac{0{,}2*0{,}91}{0{,}805} = 0{,}226$$

$$P(H_2/A) = \frac{P(H_2)\,P(A/H_2)}{P(A)} = \frac{0{,}3*0{,}81}{0{,}805} = 0{,}302$$

$$P(H_3/A) = \frac{P(H_3)\,P(A/H_3)}{P(A)} = \frac{0{,}5*0{,}76}{0{,}805} = 0{,}472$$

Задание 4. Задан закон распределения случайной величины X:

X	-3	-2	-1	0	9
P	0.01	p	0.25	0.39	0.30

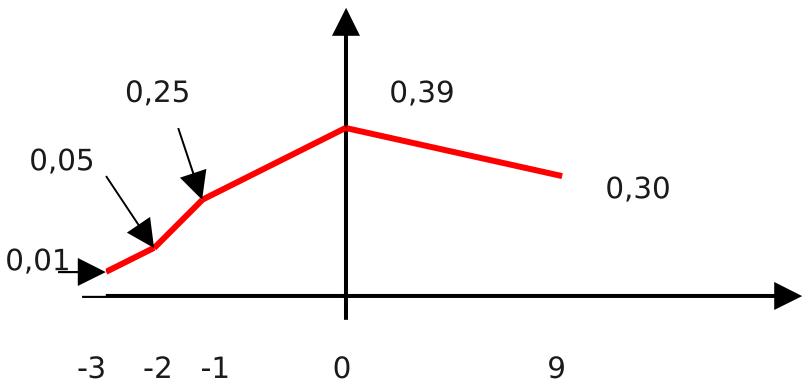
1. Найдите неизвестную вероятность p и восстановите закон распределения. Какое значение величины x наиболее вероятно при данных испытаниях?
2. Постройте многоугольник распределения вероятностей данной случайной величины.
3. Запишите функцию распределения и постройте ее график.
4. Вычислите математическое ожидание, дисперсию и среднеквадратическое отклонение. Какие смысловые значения имеют вычисленные величины?
5. Задайте закон распределения случайной величины y, если y=| x-1|.

Решение:

1) т.к. сумма вероятностей равна 1, то p = 0,05.

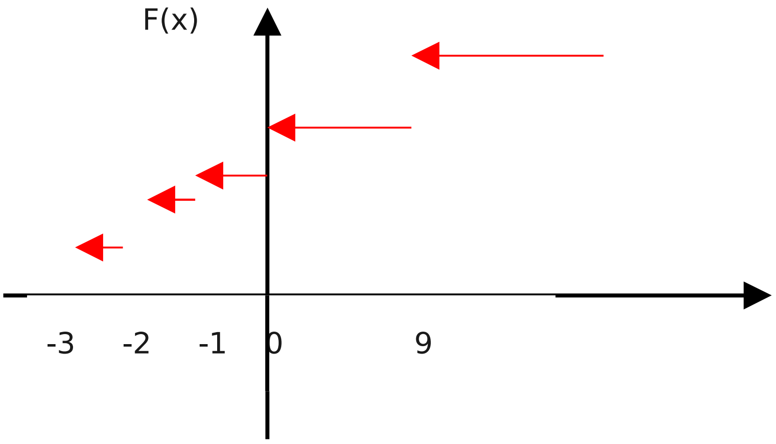
наиболее вероятное значение = 0.

2) многоугольник распределения:



3) функция распределения:

$$F(x)=\begin{cases} 0\ , & x\le -3 \\ 0,01, & -3<x\le -2 \\ 0,06, & -2<x\le -1 \\ 0,31, & -1<x\le 0 \\ 0,70, & 0<x\le 9 \\ 1, & x>9 \end{cases}$$



4)
$$M(X)=(-3)*0,01+(-2)*0,05+(-1)*0,25+9*0,30=2,32$$
$$D(X)=(-3)^2*0,01+(-2)^2*0,05+(-1)^2*0,25+9^2*0,30-(2,32)^2=19,46$$
$$\sigma(X)=4,41$$

Математическое ожидание позволит предсказать среднее значение случайной величины в результате большого числа испытаний.

Дисперсия (среднее квадратическое отклонение) позволяет предсказать среднее отклонение (рассеивание) значений случайной величины относительно математического ожидания. Среднее квадратическое отклонение имеет ту же размерность, что и сама случайная величина.

5) У= | Х -1|

Х= -3 → У=4, Х= -2 → У=3, Х= -1 → У=2, Х= 0 → У=1, Х= 9 → У=8

вероятности остаются прежними

У	1	2	3	4	8
Р	0,01	0,05	0,25	0,39	0,30

Задача 5.

В таблице задана корреляционная зависимость между значениями переменной x и соответствующими частными средними значениями $\overline{y_x}$ (в таблице обозначено y).

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
y	2	7	9	12	10	12	11	12	13	12

1. Рассчитайте и запишите уравнения прямой регрессии y по x, уравнения регрессий параболического и гиперболического видов. Ответы можно округлить до десятых.
2. Постройте эмпирическую линию регрессии.
3. На этом же поле постройте линейную, параболическую и гиперболическую линии регрессий.
4. По полученным графическим изображениям сделайте вывод, какая из этих моделей наиболее точно (адекватно) описывает заданную корреляционную зависимость. Ответ обоснуйте.

Решение.

1) Линейная регрессия имеет вид: $y = ax + b$. Вычислим необходимые величины: $N = 10$

$M_x = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} x_j = \frac{1}{10}(1+2+3+4+5+6+7+8+9+10) = \frac{1}{10} \cdot 55 = 5.5$

$M_y = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} y_j = \frac{1}{10}(2+7+9+12+10+12+11+12+13+12) = \frac{1}{10} \cdot 100 = 10$

$M_{xy} = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} x_j y_j = \frac{1}{10}(1\cdot 2 + 2\cdot 7 + 3\cdot 9 + 4\cdot 12 + 5\cdot 10 + 6\cdot 12 + 7\cdot 11 + 8\cdot 12 + 9\cdot 13 + 10\cdot 12) = \frac{1}{10}(2+14+27+48+50+72+77+96+117+120) = \frac{1}{10}\cdot 623 = 62.3$

$M_{x^2} = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} x_j^2 = \frac{1}{10}(1+2^2+3^2+4^2+5^2+6^2+7^2+8^2+9^2+10^2) = \frac{1}{10}(1+4+9+16+25+36+49+64+81+100) = \frac{1}{10}\cdot 385 = 38.5$

$a = \frac{M_{xy} - M_x M_y}{M_{x^2} - M_x^2} = \frac{62.3 - 5.5\cdot 10}{38.5 - (5.5)^2} = \frac{7.3}{8.25} \approx 2.92$

$b = M_y - M_x \cdot a = 10 - 5.5 \cdot 2.92 \approx -6.06$

Следовательно, искомая зависимость будет следующей: $y = 2.92x - 6.06$

2) Уравнение регрессии параболического типа имеет вид: $y = ax^b$. Введём новые переменные X, Y так, чтобы после замены переменных функция $y = ax^b$ превратилась в линейную:
$\begin{cases} X = \ln x, \\ Y = \ln y \end{cases}$

В результате получим линейную зависимость: $Y = \tilde{a}X + \tilde{b}$

По формулам замен переменных введём новые табличные данные:

X	0	0.69	1.10	1.39	1.61	1.79	1.95	2.08	2.20	2.30
Y	0.69	1.95	2.20	2.48	2.30	2.48	2.40	2.48	2.56	2.48

$M_X = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} X_j = \frac{1}{10}(0 + 0.69 + 1.10 + 1.39 + 1.61 + 1.79 + 1.95 + 2.08 + 2.20 + 2.30) = \frac{1}{10} \cdot 15.11 = 1.511$

$M_Y = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} Y_j = \frac{1}{10}(0.69 + 1.95 + 2.20 + 2.48 + 2.30 + 2.48 + 2.40 + 2.48 + 2.56 + 2.48) = \frac{1}{10} \cdot 22.02 = 2.202$

$M_{XY} = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} X_j Y_j = \frac{1}{10}(0 \cdot 0.69 + 0.69 \cdot 1.95 + 1.10 \cdot 2.20 + 1.39 \cdot 2.48 + 1.61 \cdot 2.30 + 1.79 \cdot 2.48 + 1.95 \cdot 2.40 + 2.08 \cdot 2.48 + 2.20 \cdot 2.56 + 2.30 \cdot 2.48) = \frac{1}{10}(0 + 1.3455 + 2.42 + 3.4472 + 3.703 + 4.4392 + 4.68 + 5.1584 + 5.632 + 5.704) = \frac{1}{10} \cdot 36.5293 = 3.65293$

$M_{X^2} = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} X_j^2 = \frac{1}{10}(0^2 + 0.69^2 + 1.10^2 + 1.39^2 + 1.61^2 + 1.79^2 + 1.95^2 + 2.08^2 + 2.20^2 + 2.30^2) = \frac{1}{10}(0 + 0.4761 + 1.21 + 1.9324 + 2.5921 + 3.2041 + 3.8025 + 4.3264 + 4.84 + 5.29) = \frac{1}{10} \cdot 27.6733 = 2.76733$

$\tilde{a} = \frac{M_{XY} - M_X M_Y}{M_{X^2} - M_X^2} = \frac{3.652933 - 1.511 \cdot 2.202}{2.76733 - (1.511)^2} = \frac{0.325708}{0.484209} \approx 0.67$

$\tilde{b} = M_Y - M_X \cdot \tilde{a} = 2.02 - 1.511 \cdot 0.67 \approx 1.19$

$Y = 0.67X + 1.19$

$b = \tilde{a} = 0.67, a = e^{\tilde{b}} \approx 3.29$

Следовательно, искомая зависимость будет следующей: $y = 3.29 \cdot x^{0.67}$

3) Уравнение регрессии гиперболического типа имеет вид: $y = a + \frac{b}{x}$. Введём новые переменные X, Y так, чтобы после замены переменных функция $y = a + \frac{b}{x}$ превратилась в линейную: $\begin{cases} X = \frac{1}{x}, \\ Y = y \end{cases}$

В результате получим линейную зависимость: $Y = \tilde{b}X + \tilde{a}$

По формулам замен переменных введём новые табличные данные:

X	1	0.5	0.33	0.25	0.2	0.17	0.14	0.13	0.11	0.1
Y	2	7	9	12	10	12	11	12	13	12

$M_X = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} X_j = \frac{1}{10}(1 + 0.5 + 0.33 + 0.25 + 0.2 + 0.17 + 0.14 + 0.13 + 0.11 + 0.1) = \frac{1}{10} \cdot 2.93 = 0.293$

$M_Y = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} Y_j = \frac{1}{10}(2 + 7 + 9 + 12 + 10 + 12 + 11 + 12 + 13 + 12) = \frac{1}{10} \cdot 100 = 10$

$M_{XY} = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} X_j Y_j = \frac{1}{10}(1 \cdot 2 + 0.5 \cdot 7 + 0.33 \cdot 9 + 0.25 \cdot 12 + 0.2 \cdot 10 + 0.17 \cdot 12 + 0.14 \cdot 11 + 0.13 \cdot 12 + 0.11 \cdot 13 + 0.1 \cdot 12) = \frac{1}{10}(2 + 3.5 + 2.97 + 3 + 2 + 2.04 + 1.54 + 1.56 + 1.43 + 1.2) = \frac{1}{10} \cdot 21.24 = 2.124$

$M_{X^2} = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} X_j^2 = \frac{1}{10}(1^2 + 0.5^2 + 0.33^2 + 0.25^2 + 0.2^2 + 0.17^2 + 0.14^2 + 0.13^2 + 0.11^2 + 0.1^2) = \frac{1}{10}(1 + 0.25 + 0.1089 + 0.0625 + 0.04 + 0.0289 + 0.0196 + 0.0169 + 0.0121 + 0.01) = \frac{1}{10} \cdot 1.5489 = 0.15489$

$\tilde{b} = \frac{M_{XY} - M_X M_Y}{M_{X^2} - M_X^2} = \frac{2.124 - 0.293 \cdot 10}{0.15489 - (0.293)^2} = \frac{-0.806}{0.069041} \approx -11.67$

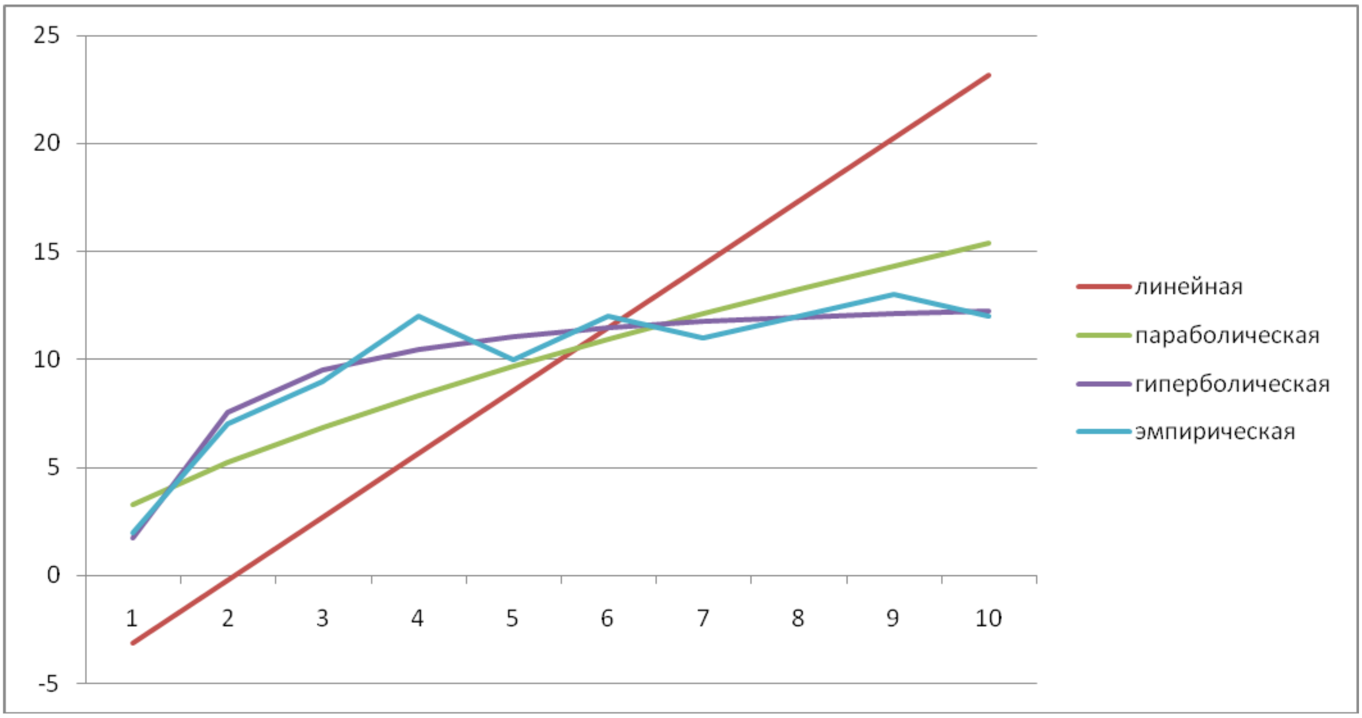
$\tilde{a} = M_Y - M_X \cdot \tilde{b} = 10 + 0.293 \cdot 11.67 \approx 13.42$

$Y = -1167X + 13.42$

$b = \tilde{b} = -11.67, a = \tilde{a} = 13.42$

Следовательно, искомая зависимость будет следующей: $y = 13.42 - \frac{11.67}{x}$

графики и расчёты отклонений сделаны в MS Excel



эмпирическая зависимость	отклонения линейной	отклонения параболической	отклонения гиперболической
2	5,14	1,29	0,25
7	7,22	1,765369937	0,585
9	6,3	2,13141719	0,53
12	6,38	3,671321612	1,4975
10	1,46	0,328233549	1,086
12	0,54	1,071583566	0,525
11	3,38	1,11745972	0,752857143
12	5,3	1,251535039	0,03875
13	7,22	1,339644321	0,876666667
12	11,14	3,388486148	0,253
сумма отклонений	54,08	17,35505108	6,39477381

Т.к. сумма отклонений гиперболической зависимости меньше других, то она является наиболее точной