Комплексные числа и действия над ними

Числа вида $z = x + iy$ назовём комплексными числами. Назовём x действительной, а y мнимой частями комплексного числа $z = x + iy$ и будем обозначать их соответственно $x = \operatorname{Re} z$, $y = \operatorname{Im} z$. Два комплексных числа будем считать равными, если совпадают их действительные и мнимые части. На множестве комплексных чисел введём операции сложения и умножения по формулам

$$z_1 + z_2 = (x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2) = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2),$$
$$z_1 z_2 = (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) = (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1).$$

Обратные операции имеют вид

$$z_1 - z_2 = (x_1 + iy_1) - (x_2 + iy_2) = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2),$$
$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2} = \frac{(x_1 + iy_1)(x_2 - iy_2)}{(x_2 + iy_2)(x_2 - iy_2)} = \frac{(x_1x_2 + y_1y_2) + i(x_2y_1 - x_1y_2)}{(x_2)^2 + (y_2)^2}$$

Каждому комплексному числу $z = x + iy$ сопоставим точку (x, y) плоскости R^2. Этим устанавливается взаимно однозначное соответствие между комплексными числами и точками плоскости. Операция сложения комплексных чисел совпадает с операцией сложения радиус-векторов точек (x, y). Для операции умножения комплексных чисел не находится соответствующей операции над векторами.

Если действительные числа отождествить с комплексными числами вида $x + 0 \cdot i$, то эти операции совпадают с обычными операциями над действительными числами и поэтому комплексные числа являются расширением множества действительных чисел. Из введённых выше операций над комплексными числами следует, что для комплексного числа $i = 0 + i \cdot 1$ получаем $i^2 = i \cdot i = -1$.

Модулем $|z|$ комплексного числа $z = x + iy$ назовём длину радиус-вектора точки (x, y), то есть число $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$. Тогда

$$z = x + iy = \sqrt{x^2 + y^2} \cdot \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} + i \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right).$$

Числа $\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ и $\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ являются соответственно косинусом и синусом угла φ между радиус-вектором точки (x, y) и осью OX. Поэтому можем записать, что $z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$. Эта форма записи числа z называется тригонометрической формой комплексного числа. Угол φ при этом называется аргументом числа z. Совершенно ясно, что числа, аргументы которых отличаются на 2π, совпадают. Среди всех значений аргумента числа z выбирают значение, называемое главным, и обозначают его $\arg z$. Наиболее удобным является выбор главного значения аргумента из промежутков $[0, 2\pi)$, $[-\pi, \pi)$, $[-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$. В пакете Mathcad главное значение аргумента выбирается из промежутка $[-\pi, \pi)$. При выборе главного значения аргумента из промежутка $[0, 2\pi)$ его находят по формулам

$$\arg z = \begin{cases} \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}, & \text{если } x > 0, y > 0, \\ \pi + \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}, & \text{если } x < 0, \\ 2\pi + \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}, & \text{если } x > 0, y < 0. \end{cases}$$

Формулы для нахождения главного значения аргумента, при выборе его из других промежутков, предлагается написать самостоятельно. Все значения аргумента числа z обозначают $\operatorname{Arg} z$. Отметим, что $\operatorname{Arg} z = \arg z + 2k\pi$.

Полагая $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$, можем записать $z = |z|e^{i\varphi}$. Эта форма записи числа z называется показательной формой записи комплексного числа. Так как $e^{-i\varphi} = \cos(-\varphi) + i\sin(-\varphi) = \cos\varphi - i\sin\varphi$, то, складывая и вычитая с $e^{i\varphi}$, получаем формулы Эйлера

$$\cos\varphi = \frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2}, \quad \sin\varphi = \frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2i}.$$

Далее, $e^{i\varphi_1} e^{i\varphi_2} = (\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2) = \ = \cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2) = e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}$.

Поэтому

$z_1 z_2 = |z_1|(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)|z_2|(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2) = \ = |z_1|\cdot|z_2|\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2) = |z_1|\cdot|z_2| e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}$.

Таким образом, мы получили, что при умножении комплексных чисел их модули перемножаются, а аргументы складываются. Аналогично, при делении комплексных чисел их модули делятся, а аргументы вычитаются.

Как следствие этих результатов получаем формулы Муавра

$$z^n = |z|^n e^{in\varphi} = |z|^n (\cos n\varphi + i\sin n\varphi),$$

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{|z|}\left(\cos\frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right), \ k = 0, 1, \ldots, n-1.$$